

Funkciu ste už poznali na základnej škole.

Funkciou na množine A sa nazýva predpis, ktorým je každému prvku množiny A priradené práve jedno reálne číslo.

Množina A sa nazýva **definičný obor funkcie**.

Funkciu budeme zvyčajne označovať malými písmenami: $f, g, h, \dots$

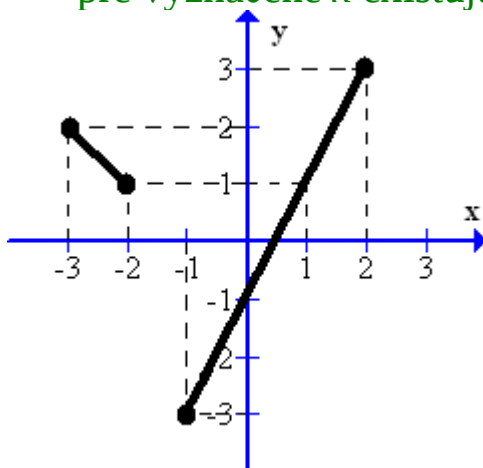
Množinu, ktorá je definičným oborom funkcie f , budeme označovať symbolom $D(f)$. Podobne $D(g)$, $D(h)$.

Príklad:

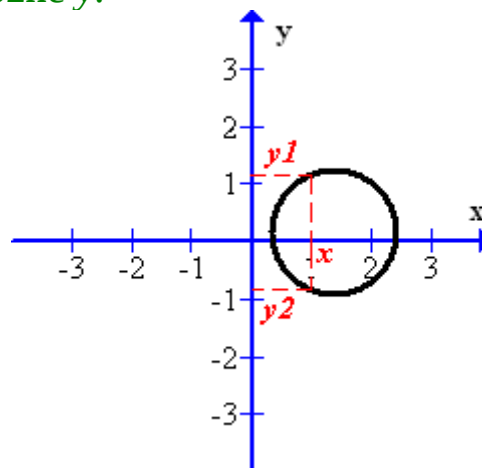
Funkciou nazývame predpis $f : y = \frac{1}{x+2}$. Táto funkcia je definovaná pre všetky x , ktoré sú reálne čísla rôzne od -2 (lebo v menovateli zlomku nesmie byť 0). Preto $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ alebo $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Príklad:

- Daná množina usporiadaných dvojíc $\{[1;4], [2;3], [0;-3], [4;4]\}$ je predpisom funkcie, pretože každému x je priradené práve jedno y .
- Daná množina usporiadaných dvojíc $\{[1;4], [1;3], [0;-3], [4;4]\}$ nie je predpisom funkcie, pretože pre $x = 1$ je priradené $y = 4$ aj $y = 3$.
- Na obrázku 1. je graf funkcie, pretože každému x je priradené práve jedno y . Na obrázku 2. nie je graf funkcie, pretože napr. pre vyznačené x existujú dve rôzne y .



1.



2.

Ak je daná funkcia f a ak číslu $c \in D(f)$ priradíme číslo d , zapíšeme tento fakt $f(c) = d$. Číslo $f(c)$ budeme nazývať **hodnota funkcie f v danom bode c** alebo **funkčná hodnota** funkcie f v danom bode c .

Príklad:

Nech je daná funkcia $f: y = \frac{1}{x+2}$. Určte jej funkčné hodnoty v bodoch 1, 2, -1.

Riešenie:

Keďže čísla 1, 2, -1 patria definičnému oboru tejto funkcie, môžeme vypočítať funkčné hodnoty v daných bodoch.

Funkčná hodnota v bode 1: $f(1): y = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, čiže číslu 1 priradíme číslo $\frac{1}{3}$ alebo pre $x = 1$ je hodnota $y = \frac{1}{3}$.

Funkčná hodnota v bode 2: $f(2): y = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$, čiže číslu 2 priradíme číslo $\frac{1}{4}$ alebo pre $x = 2$ je hodnota $y = \frac{1}{4}$.

Funkčná hodnota v bode -1: $f(-1): y = \frac{1}{-1+2} = 1$, čiže číslu -1 priradíme číslo 1 alebo pre $x = -1$ je hodnota $y = 1$.

Oborom hodnôt funkcie f sa nazýva množina všetkých $y \in R$, ku ktorým existuje aspoň jedno také $x \in D(f)$, že $y = f(x)$. Túto množinu označujeme $H(f)$.

Príklad:

Daná je funkcia $f: y = \frac{1}{x+2}$. Definičný obor funkcie je $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Funkcia nadobúda v bodoch svojho definičného oboru kladné aj záporné hodnoty, Jediná hodnota, ktorú

nenadobudne je 0. Preto obor hodnôt tejto funkcie je $H(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Grafom funkcie f v zvolenej sústave súradníc Oxy v rovine sa nazýva množina všetkých bodov $X[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Grafy zvyčajne zostrojujeme v karteziánskej súradnicovej sústave, v ktorej sú dĺžkové jednotky na oboch osiach rovnakej veľkosti. Niekedy je výhodné zvoliť jednotky na jednotlivých osiach rôzne.

Príklad:

Zostrojte graf funkcie $f: y = 20x$.

Riešenie:

Definičný obor funkcie je $D(f) = R$. Určíme si funkčné hodnoty tejto funkcie vo vybraných bodoch napr. -2, -1, 0, 1, 2:

$$f(-2): y = 20 \cdot (-2) = -40$$

$$f(-1): y = 20 \cdot (-1) = -20$$

$$f(0): y = 20 \cdot 0 = 0$$

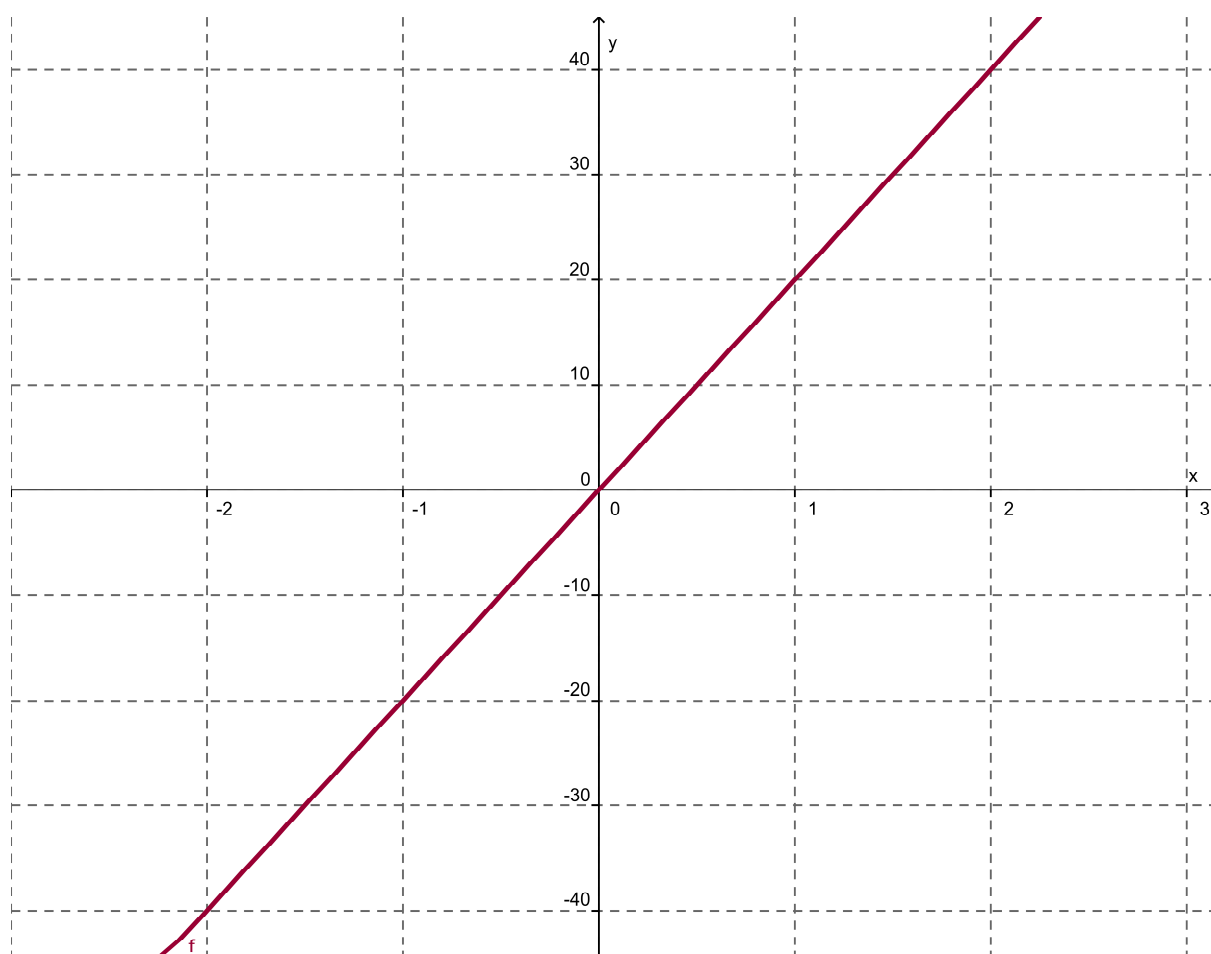
$$f(1): y = 20 \cdot 1 = 20$$

$$f(2): y = 20 \cdot 2 = 40$$

Tieto usporiadané dvojice môžeme zapísať do tabuľky:

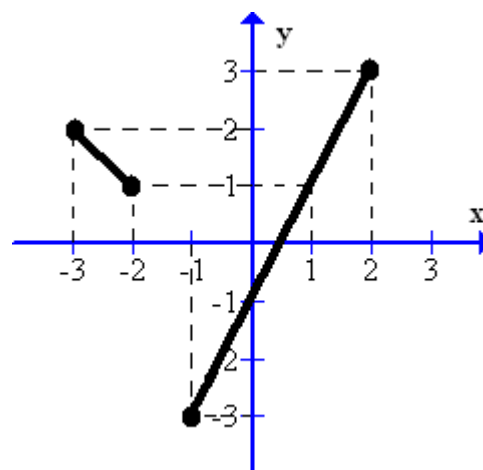
X	-2	-1	0	1	2
f(x)	-40	-20	0	20	40

Každú dvojicu z tabuľky znázorníme v karteziánskej súradnicovej sústave a body pospájame:

Príklad:

Na obrázku je zostrojený graf funkcie g .
Z grafu určte:

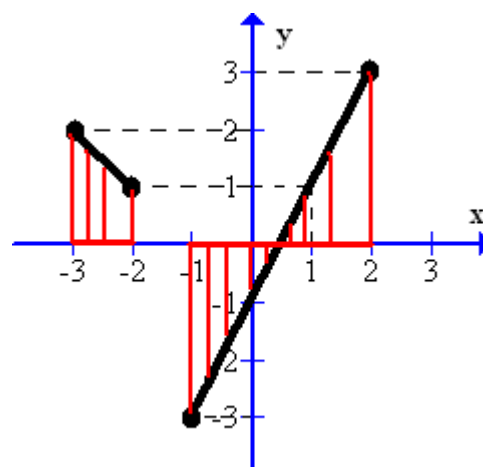
- definičný obor funkcie g ;
- obor hodnôt funkcie g ;
- $g(-3)$, $g(0)$, $g(2)$

Riešenie:

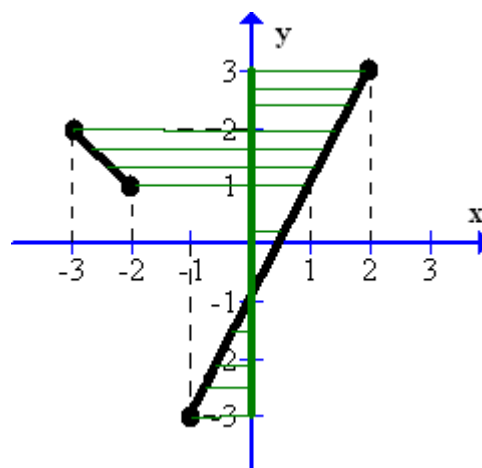
- Definičný obor funkcie g je množina všetkých $x \in \mathbb{R}$, ktorým je priradené také $y \in \mathbb{R}$, že $y = g(x)$. Túto množinu môžeme zostrojiť tak, že zostrojíme kolmé priemety všetkých bodov, ktoré patria grafu funkcie g , do osi x :

Preto:

$$D(g) = \langle -3; -2 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle$$



- b) Obor hodnôt funkcie g je množina všetkých $y \in R$, ktorým je priradené také $x \in R$, že $y = g(x)$. Túto množinu môžeme zostrojiť tak, že zostrojíme kolmé priemety všetkých bodov, ktoré patria grafu funkcie g , do osi y :



Preto:

$$D(g) = \langle -3; 3 \rangle$$

- c) Z grafu vieme vyčítať, že:

$$g(-3) = 2, g(0) = -1, g(2) = 3$$

Vlastnosti funkcií

Funkcia f sa nazýva **párna** práve vtedy, keď súčasne platí:

1. Pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$.
2. Pre každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$.

Graf **párnej** funkcie je **súmerný podľa osi y** pravouhlej súradnicovej sústavy Oxy .

Príklad:

Na obrázku je graf funkcie f . Zistite, či je funkcia f párna.

Riešenie:

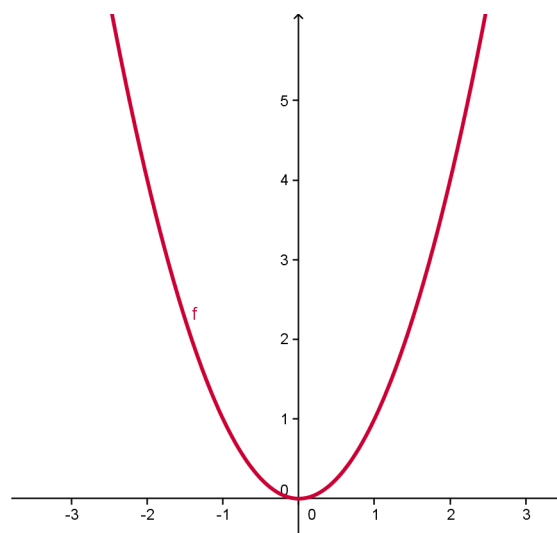
Z grafu funkcie vidíme, že:

$x = -2$ aj $-x = 2$ patria definičnému oboru funkcie.

Porovnáme funkčné hodnoty v týchto bodoch:

$$f(-2) = 4 \text{ a } f(2) = 4.$$

Keďže $f(x) = f(-x)$, tak funkcia je párna.



Funkcia f sa nazýva **nepárna** práve vtedy, keď súčasne platí:

1. Pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$.
2. Pre každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf **nepárnej** funkcie je **súmerný podľa začiatku** pravouhlej súradnicovej sústavy Oxy.

Príklad:

Na obrázku je graf funkcie f . Zistite, či je funkcia f nepárna.

Riešenie:

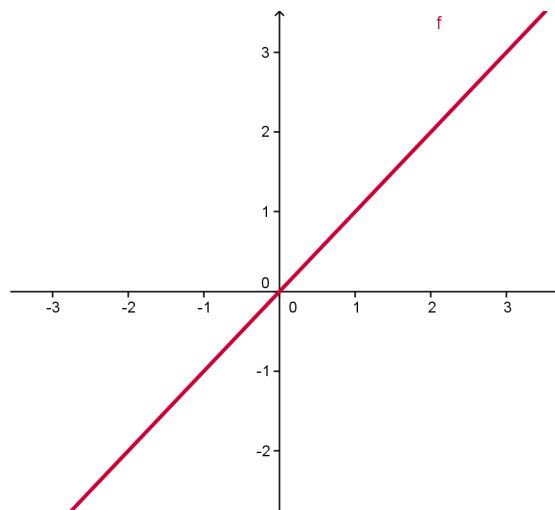
Z grafu funkcie vidíme, že:

$x = -2$ aj $-x = 2$ patria definičnému oboru funkcie.

Porovnáme funkčné hodnoty v týchto bodoch:

$$f(-2) = -2 \text{ a } f(2) = 2.$$

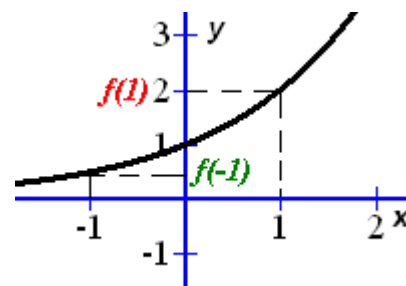
Keďže $f(-x) = -f(x)$, tak funkcia je nepárna.



Funkcia f sa nazýva **rastúca funkcia** na množine M ($M \subset D(f)$) práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: Ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) < f(x_2)$.

Príklad:

Určte, či funkcia na obrázku je rastúca.



Riešenie:

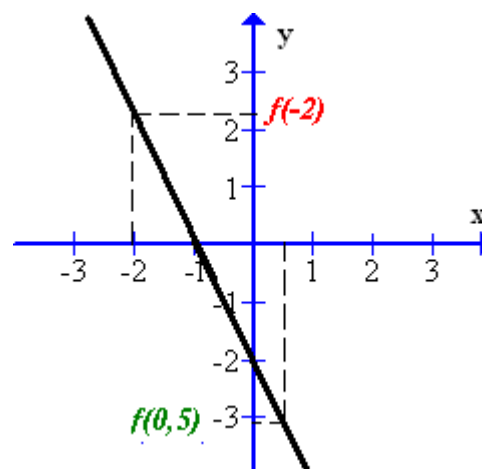
Zvolíme si prvky $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, kde $x_1 < x_2$.

Z grafu funkcie zistíme funkčné hodnoty v týchto bodoch. Vidíme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Preto funkcia na obrázku je rastúca.

Funkcia f sa nazýva **klesajúca funkcia** na množine M ($M \subset D(f)$) práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: Ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) > f(x_2)$.

Príklad:

Určte, či funkcia na obrázku je klesajúca.



Riešenie:

Zvolíme si prvky $x_1 = -2$, $x_2 = 0,5$, kde $x_1 < x_2$.

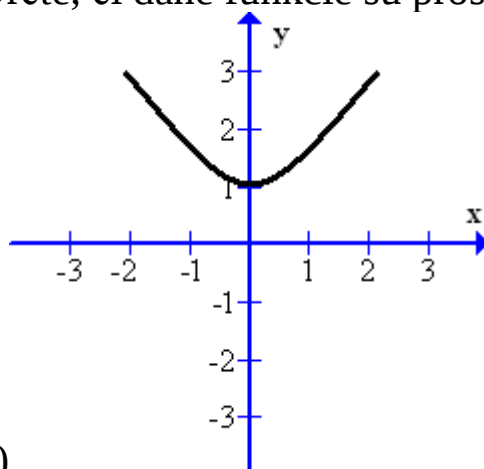
Z grafu funkcie zistíme funkčné hodnoty v týchto bodoch. Vidíme, že $f(x_1) > f(x_2)$. Preto funkcia na obrázku je klesajúca.

Funkcia f sa nazýva **prostá** práve vtedy, keď pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: Ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

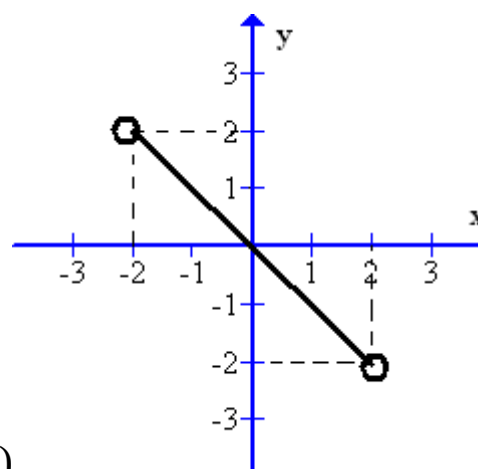
Ak je funkcia rastúca alebo klesajúca na množine M ($M \subset D(f)$), tak je prostá.

Príklad:

Určte, či dané funkcie sú prosté:



a)



b)

Riešenie:

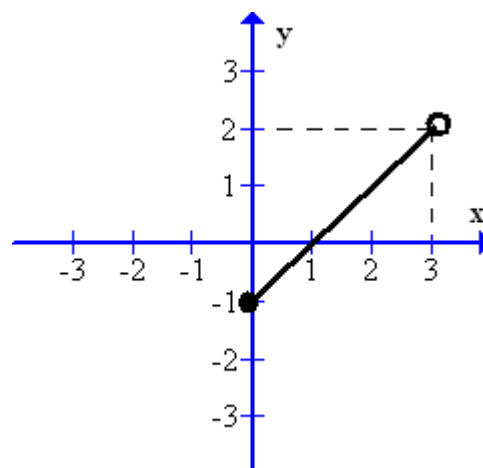
a) Keďže $f(-1) = f(1)$, funkcia nie je prostá.

b) Pre každú dvojicu $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, funkcia je prostá.

Ak je funkcia f prostá na M ($M \subset D(f)$), tak k nej existuje **inverzná funkcia**. Označujeme ju f^{-1} a platí: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$. Grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Príklad:

Na obrázku je graf funkcie f . Zostrojte k tejto funkcii inverznú funkciu. Popíšte vlastnosti oboch funkcií.



Riešenie:

Funkcia f je prostá (lebo je rastúca), preto k nej existuje inverzná funkcia.

Definičný obor funkcie f je

$D(f) = \langle 0; 3 \rangle$ a obor hodnôt funkcie f je

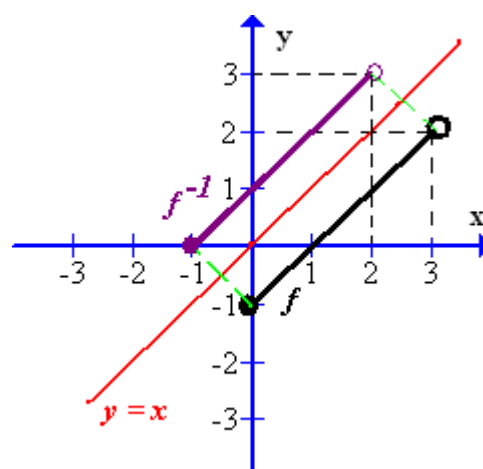
$H(f) = \langle -1; 2 \rangle$. Preto definičný obor

funkcie f^{-1} je

$D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1; 2 \rangle$ a obor hodnôt

funkcie f^{-1} je $H(f^{-1}) = D(f) = \langle 0; 3 \rangle$.

Funkcie f aj f^{-1} sú rastúce.



Ak je funkcia f **rastúca**, potom aj jej inverzná funkcia f^{-1} je **rastúca**.

Ak je funkcia f **klesajúca**, potom aj jej inverzná funkcia f^{-1} je **klesajúca**.

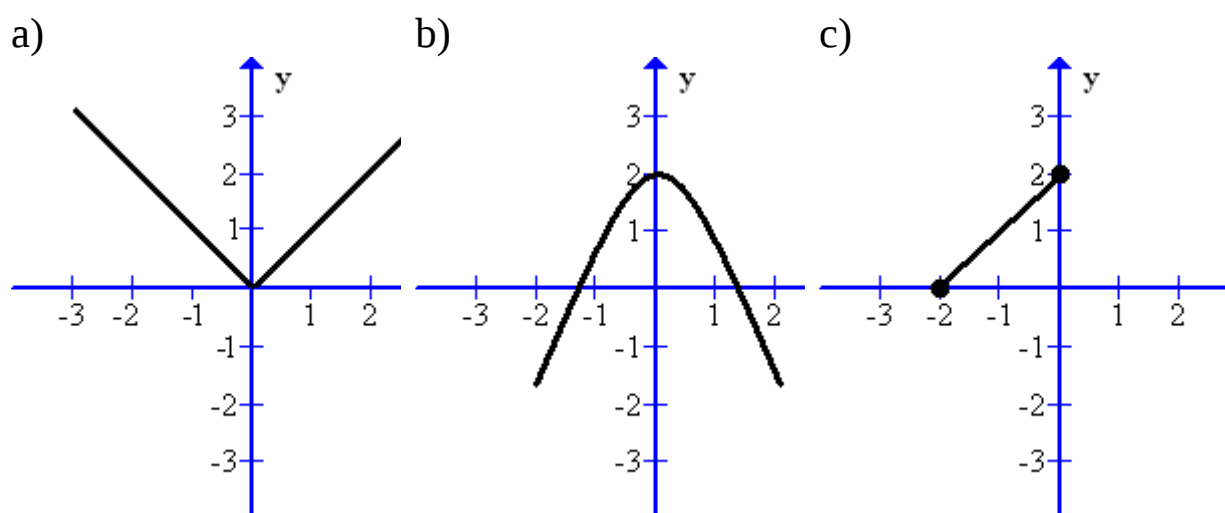
Funkcia f sa nazýva **funkcia zdola ohraničená na množine M** ($M \subset D(f)$) práve vtedy, keď existuje také číslo d , že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq d$.

Funkcia f sa nazýva **funkcia zhora ohraničená na množine M** ($M \subset D(f)$) práve vtedy, keď existuje také číslo h , že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \leq h$.

Funkcia f sa nazýva **funkcia ohraničená na množine M** ($M \subset D(f)$) práve vtedy, keď je zdola ohraničená na M a súčasne zhora ohraničená na M .

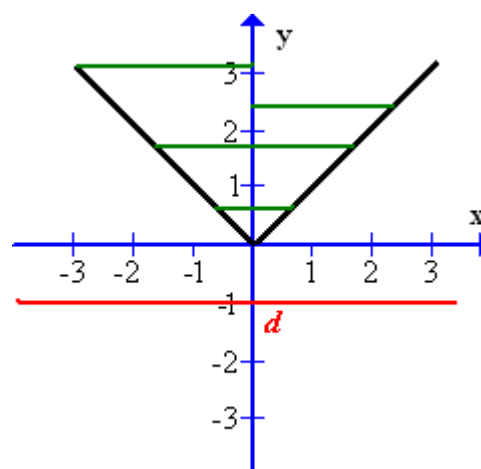
Príklad:

Zistite, či dané funkcie sú zdola ohraničené, zhora ohraničené alebo ohraničené.

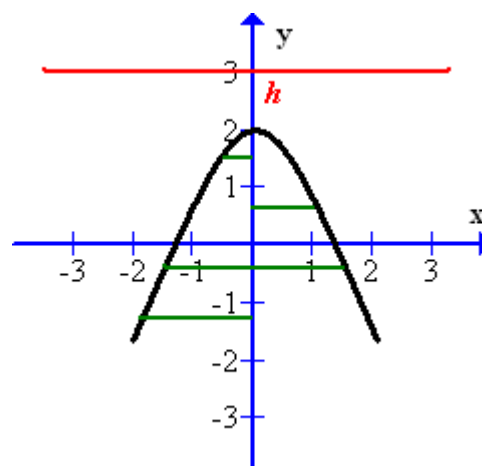


Riešenie:

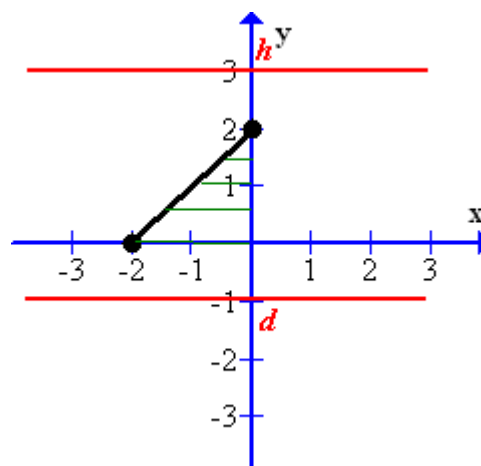
- a) Zvolíme si $d = -1$. Vidíme, že funkčné hodnoty pre $x \in D(f)$ majú väčšiu hodnotu ako zvolené d . Preto funkcia je zdola ohraničená.



- b) Zvolíme si $h = 3$. Vidíme, že funkčné hodnoty pre $x \in D(f)$ majú menšiu hodnotu ako zvolené h . Preto funkcia je zhora ohraničená.



- c) Zvolíme si $h = 3$, $d = -1$. Vidíme, že funkčné hodnoty pre $x \in D(f)$ majú menšiu hodnotu ako zvolené h a zároveň väčšiu hodnotu ako zvolené d . Preto funkcia je zhora ohraničená aj zdola ohraničená. Funkcia je teda ohraničená.



Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in M$ ($M \subset D(f)$) **maximum na množine M** práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $b \in M$ ($M \subset D(f)$) **minimum na množine M** práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq f(b)$.

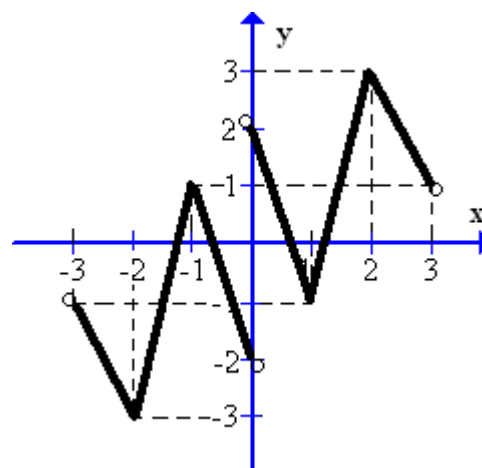
Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in M$ ($M \subset D(f)$) **ostré maximum na množine M** práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$, $x \neq a$ platí $f(x) < f(a)$.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $b \in M$ ($M \subset D(f)$) **ostré minimum na množine M** práve vtedy, keď pre všetky $x \in M$, $x \neq b$ platí $f(x) > f(b)$.

Príklad:

Daná je funkcia f . Určte jej:

- maximum na intervale $(1,5;3)$;
- minimum na intervale $(0;2)$;
- ostré maximum a ostré minimum na svojom definičnom obore.

Riešenie:

- Na intervale $(1,5;3)$ dosahuje funkcia maximálnu hodnotu 3 v bode 2. Preto funkcia na intervale $(1,5;3)$ má v bode $x = 2$ maximum.
- Na intervale $(0;2)$ dosahuje funkcia minimálnu hodnotu -1 v bode 1. Preto funkcia na intervale $(0;2)$ má v bode $x = -1$ minimum.
- Na svojom definičnom obore dosahuje funkcia jedinú maximálnu hodnotu 3 v bode 2. Preto má funkcia v bode $x = 2$ ostré maximum. Jedinú minimálnu hodnotu -3 dosahuje funkcia v bode -2. Preto má funkcia v bode $x = -2$ ostré minimum.

Niektoré druhy funkcií**Lineárna funkcia**

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia na množine R , ktorá je daná rovnicou

$$y = ax + b,$$

kde a, b sú reálne čísla.

Pre funkcie, v ktorých $a = 0$, teda pre funkcie dané rovnicou $y = b$, používame názov **konštantné funkcie**.

Pre funkcie, v ktorých $b = 0$, teda pre funkcie dané rovnicou $y = ax$, používame názov **priama úmernosť**.

Grafom každej lineárnej funkcie je **priamka** rôznobežná s osou y . Priamka pretína os y v bode $P_y[0;b]$.

Príklad:

Zostrojte graf lineárnej funkcie, ktorá je daná rovnicou

a) $p: y = 3$

b) $p: y = 2x + 1$

c) $p: y = -2x + 1$.

Popíšte vlastnosti týchto funkcií.

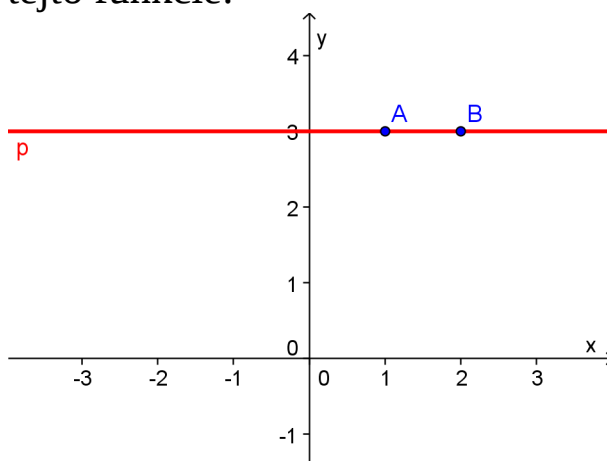
Riešenie:

Na zostrojenie grafu funkcie potrebujeme určiť súradnice dvoch bodov. Preto si zvolíme x -ové súradnice týchto bodov a y -ové súradnice dopočítame.

a) $p: y = 3$

x	1	2
y	3	3

Zostrojíme graf tejto funkcie:



Definičný obor funkcie je R .

Obor hodnôt je $\{3\}$.

Funkcia nie je ani rastúca ani klesajúca.

Funkcia nie je prostá.

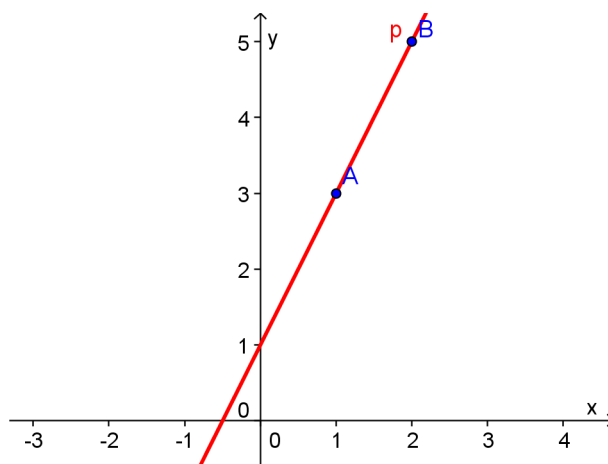
Funkcia je zdola aj zhora ohraničená, teda je ohraničená.

V každom $x \in R$ má maximum a minimum.

b) $p: y = 2x + 1$

x	1	2
y	3	5

Zostrojíme graf tejto funkcie:



Definičný obor funkcie je R .

Obor hodnôt je R .

Funkcia je rastúca.

Funkcia je prostá.

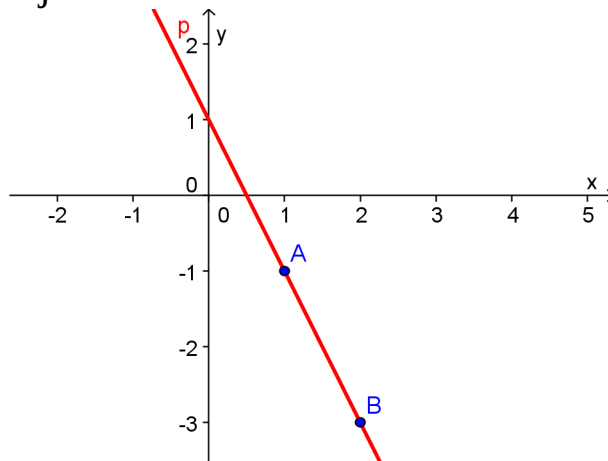
Funkcia nie je zdola ani zhora ohraničená, teda nie je ohraničená.

Nemá maximum a minimum.

c) $p: y = -2x + 1$

x	1	2
y	-1	-3

Zostrojíme graf tejto funkcie:



Definičný obor funkcie je R .

Obor hodnôt je R .

Funkcia je klesajúca.

Funkcia je prostá.

Funkcia nie je zdola ani zhora ohraničená, teda nie je ohraničená.

Nemá maximum a minimum.

Z grafov vidíme, že ak

1. $a > 0$, tak funkcia je rastúca;
2. $a < 0$, tak funkcia je klesajúca;
3. $a = 0$, graf funkcie je rovnobežný s osou x .

Exponenciálna funkcia

Exponenciálnou funkciou so základom a sa nazýva každá funkcia daná rovnicou

$$y = a^x,$$

kde a je kladné reálne číslo rôzne od 1.

Pokiaľ $a = 1$, funkcia by bola konštantná, pretože $1^x = 1$.

Grafom exponenciálnej funkcie je exponenciálna krivka prechádzajúca bodom so súradnicami $[0; 1]$, ktorá nepretína os x .

Príklad:

Zostrojte grafy funkcií

a) $f : y = 2^x$;

b) $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Z grafov popíšte vlastnosti týchto funkcií.

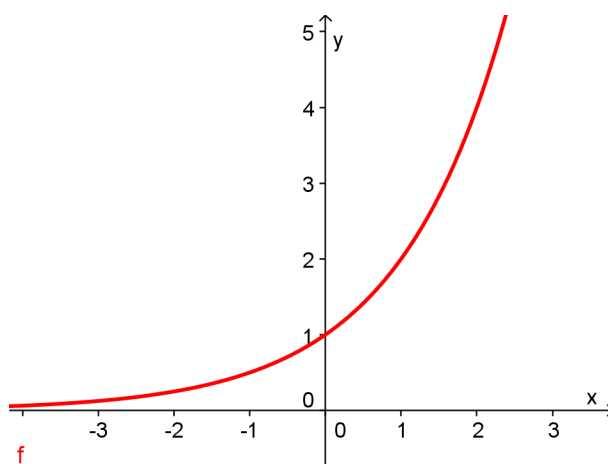
Riešenie:

Určíme si hodnoty funkcií pre vybrané x :

a) $f : y = 2^x$;

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$	2^0	2^1	2^2	2^3
2^x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Zostrojíme graf funkcie:



Definičný obor funkcie je R .

Obor hodnôt je $(0; \infty)$.

Funkcia je rastúca.

Funkcia je prostá.

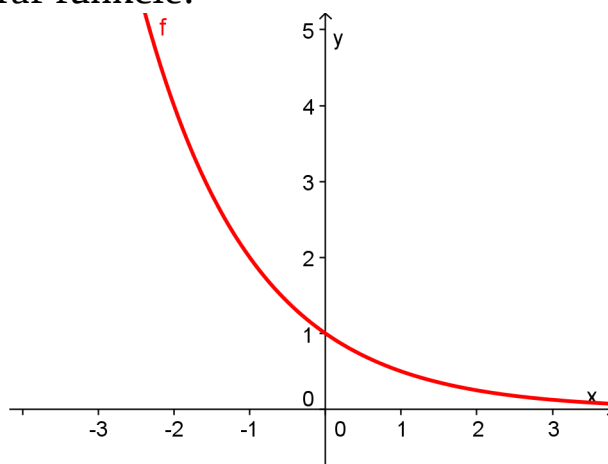
Funkcia je zdola (napr. pre $d = 0$), nie je zhora ohraničená, teda nie je ohraničená.

Nemá maximum a minimum.

b) $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

Zostrojíme graf funkcie:



Definičný obor funkcie je $\mathbb{R}$.

Obor hodnôt je $(0; \infty)$.

Funkcia je klesajúca.

Funkcia je prostá.

Funkcia je zdola (napr. pre $d = 0$), nie je zhora ohraničená, teda nie je ohraničená.

Nemá maximum a minimum.

Z grafov vidíme, že ak

1. $a > 1$, tak funkcia je rastúca;
2. $0 < a < 1$, tak funkcia je klesajúca;
3. grafy prechádzajú bodom 1 na y -ovej osi;
4. grafy nepretínajú os x .

Príklad:

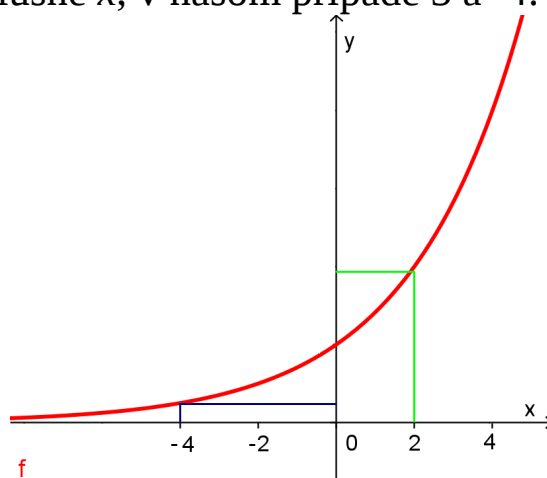
Na základe vlastností exponenciálnych funkcií rozhodnite, ktoré z nasledujúcich mocnín sú väčšie ako 1:

$$(0,5)^{-2}; \left(\frac{42}{9}\right)^3; 2,12^{-4}; \left(\frac{1}{3}\right)^{2,5}$$

Riešenie:

Využijeme grafy exponenciálnej funkcie. Mocniny si rozdelíme na dve skupiny: so základom väčším ako 1 a so základom menším ako 1.

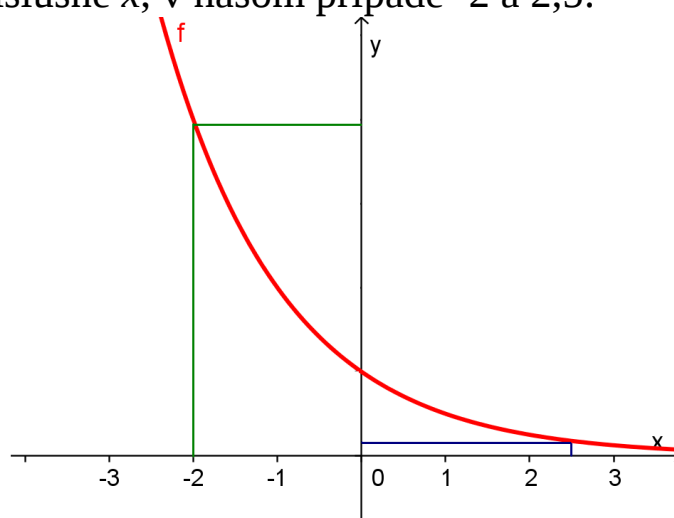
Pre mocniny $\left(\frac{42}{9}\right)^3; 2,12^{-4}$ využijeme graf rastúcej funkcie, určíme hodnotu pre príslušné x , v našom prípade 3 a -4:



Vidíme, že hodnota pre $x = 2$ je väčšia ako 1 a pre $x = -4$ je menšia

ako 1 . Preto platí: $\left(\frac{42}{9}\right)^3 > 1$ a $2,12^{-4} < 1$.

Pre mocniny $(0,5)^{-2}; \left(\frac{1}{3}\right)^{2,5}$ využijeme graf klesajúcej funkcie, určíme hodnotu pre príslušné x , v našom prípade -2 a 2,5:



Vidíme, že hodnota pre $x = -2$ je väčšia ako 1 a pre $x = 2,5$ je menšia

ako 1 . Preto platí: $(0,5)^{-2} > 1$ a $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,5} < 1$.

Použitá literatúra:

- [1] ODVÁRKO, O.: Funkcie I pre 1. ročník gymnázií. Bratislava:SPN, 1998.
- [2] ODVÁRKO, O. a kol.: Matematika pre 2. ročník gymnázií. Bratislava:SPN, 1985.
- [3] BEROVÁ, M. – JANISKOVÁ, J. – KOLBASKÁ, V.: Riešené príklady z matematiky pre gymnáziá a stredné školy 1. Bratislava: Editor, 2003.