

Logické myslenie sa rozvíja aj pomocou výrokovej logiky. Túto časť matematiky využívajú aj právnici, žurnalisti, filozofi, vedci.

Výrok je tvrdenie v podobe oznamovacej vety, o ktorom má zmysel hovoriť, či je pravdivé alebo nepravdivé.

O výroku, ktorý je pravdivý, hovoríme, že **platí**, má pravdivostnú hodnotu pravda (1).

O výroku, ktorý je nepravdivý, hovoríme, že **neplatí**, má pravdivostnú hodnotu nepravda (0).

Príklad:

Zistite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu:

- a) Hlavné mesto Rakúska je Viedeň.
- b) Súčet dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.
- c) Kino Považan.
- d) Uč sa!
- e) Je párne číslo deliteľné číslom dva?

Riešenie:

- a) Je to oznamovacia veta, o ktorej vieme, že je pravdivá. Preto je to výrok, ktorý je pravdivý.
- b) Je to oznamovacia veta, o ktorej vieme, že je nepravdivá. Preto je to výrok, ktorý je nepravdivý.
- c) Nie je to oznamovacia veta, preto to nie je výrok.
- d) Je to rozkazovacia veta, teda nie je to oznamovacia veta a preto to nie je výrok.
- e) Je to opytovacia veta, teda nie je to oznamovacia veta a preto to nie je výrok.

Hypotéza je výrok, ktorého pravdivostnú hodnotu zatiaľ nepoznáme.

„Na Marse je život.“ je hypotéza, pretože nevieme jednoznačne určiť, či je tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé. Jedna z týchto možností však musí nastať.

Axióma je výrok, ktorý je bez pochybností pravdivý, nedokazuje sa.

„Priamka je určená dvoma bodmi.“

„Každé prirodzené číslo n má svojho nasledovníka $n + 1$.“

Definícia určuje názov nového pojmu a jeho vlastnosti pomocou základných alebo skôr odvodených pojmov.

Veta (matematická veta) je výrok s matematickým obsahom, ktorého pravdivosť je dokázaná pomocou axióm alebo pomocou výrokov, ktoré už boli dokázané.

Negácia výroku je výrok, ktorý popiera to, čo tvrdí pôvodný výrok. Negáciu výroku V označujeme V' alebo $\neg V$. Tvoríme ju najčastejšie pomocou slovného spojenia *Nie je pravda, že ..., Neplatí, že ...*

Negácia výroku má opačnú pravdivostnú hodnotu ako pôvodný výrok. Čiže, ak je výrok V pravdivý, tak je výrok V' nepravdivý. Ak je výrok V nepravdivý, tak je výrok V' pravdivý.

Príklad:

Určte negácie daných výrokov a ich pravdivostnú hodnotu:

- a) Číslo 7 je deliteľné dvoma.
- b) Dnes je streda.
- c) $2 + 3 \neq 5$.
- d) Štvorec nie je rovnobežníkom.

Riešenie:

- a) Nie je pravda, že číslo 7 je deliteľné dvoma. Neplatí, že číslo 7 je deliteľné dvoma. Číslo 7 nie je deliteľné dvoma.
- b) Nie je pravda, že dnes je streda. Neplatí, že dnes je streda. Dnes nie je streda. *Negácia nemôže byť napríklad: Dnes je piatok.*
- c) Nie je pravda, že $2 + 3 \neq 5$. Neplatí, že $2 + 3 \neq 5$. $2 + 3 = 5$
- d) Nie je pravda, že štvorec nie je rovnobežníkom. Neplatí, že štvorec nie je rovnobežníkom. Štvorec je rovnobežníkom.

Príklad:

Určte pôvodný výrok, ak je daná jeho negácia:

A' : Rieka Dunaj nepreteká cez Poľsko.

B' : Neplatí, že číslo 3,98 nie je celé číslo.

C' : Nie je pravda, že lichobežník patrí medzi rovnobežníky.

Riešenie:

A : Rieka Dunaj preteká cez Poľsko.

B : Číslo 3,98 nie je celé číslo.

C : Lichobežník patrí medzi rovnobežníky.

Výroky, ktoré obsahujú číselné vyjadrenia, nazývame **jednoduchými kvantifikovanými výroky**. Takéto výroky okrem čísel obsahujú slová *každý*, *aspoň*, *práve*, *najviac*, *nijaký*, *ani jeden*. Na negáciu tohto typu výrokov používame ako pomôcku túto tabuľku:

Výrok	Negácia výroku
Každý ... je ...	Aspoň jeden ... nie je ...
Aspoň jeden ... je ...	Ani jeden ... nie je ...
Aspoň n ... je ... ($n > 1$)	Najviac $(n - 1)$... je ...
Najviac n ... je ... ($n > 1$)	Aspoň $(n + 1)$... je ...
Negácia výroku	Výrok

Príklad:

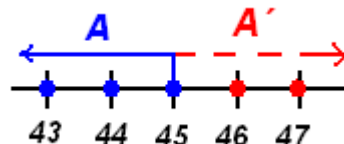
Negujte výroky:

- Najviac 45 osôb môže ísť autobusom.
- Ani jeden žiak v našej triede nenosí okuliare.
- Aspoň jeden trojuholník je pravouhlý.
- Práve dvaja z nás pôjdu do kina.

Riešenie:

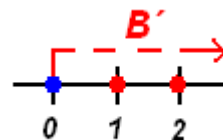
Výroky negujeme pomocou vyššie uvedenej tabuľky. Pomôže nám aj vyjadrenie pomocou číselnej osi, na ktorej vyznačíme počet uvedený vo výroku modrou farbou a počet v negácii červenou farbou. Výsledok zapíšeme slovne.

- A : Najviac 45 osôb môže ísť autobusom.



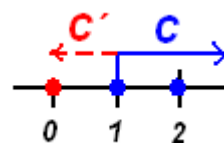
A' : Aspoň 46 osôb môže ísť autobusom.

- B : Ani jeden žiak v našej triede nenosí okuliare.
Inak povedané: 0 žiakov v našej triede nosí okuliare.

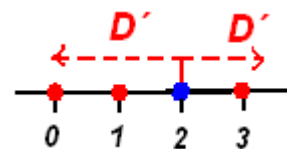


B' : Aspoň jeden žiak v našej triede nosí okuliare.

- c) C : Aspoň jeden trojuholník je pravouhlý.
 C' : Žiadny trojuholník nie je pravouhlý. *Inak povedané: 0 trojuholníkov je pravouhlých. Žiaden trojuholník je pravouhlý. – tieto vety treba „poslovenčiť“.*



- d) D : Práve dvaja z nás pôjdu do kina.
 D' : Do kina pôjde najviac jeden alebo aspoň traja z nás.



Okrem jednoduchých kvantifikovaných výrokov existujú ďalšie typy kvantifikovaných výrokov:

Všeobecný kvantifikátor (označujeme $\forall$) vyjadruje, že každý uvažovaný objekt má (alebo žiadny nemá) vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov *každý*, *žiadny* sa na tento účel používajú aj slová *všetky*, *ľubovoľný*, *ktorýkoľvek*, *ani jeden*.

Existenčný kvantifikátor (označujeme $\exists$) vyjadruje, že aspoň jeden uvažovaný objekt má (alebo žiadny nemá) vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov *aspoň jeden* sa na tento účel používajú aj slová *niektorý*, *možno nájsť*, *existuje*.

Negácie týchto kvantifikátorov sú uvedené v tabuľke:

Výrok	Negácia výroku
Pre každý ... platí, že ...	Existuje ..., ktorý nie je ...
Existuje ..., ktorý je ...	Žiadny ... nie je

Príklad:

Určte pravdivostné hodnoty a negácie výrokov:

A: Každý trojuholník má súčet veľkostí vnútorných uhlov 180° .

B: Existuje trojuholník, ktorému sa dá opísať kružnica.

Riešenie:

A': Existuje trojuholník, v ktorom súčet veľkostí vnútorných uhlov nie je 180° :

Pôvodný výrok A je pravdivý, jeho negácia je nepravdivá.

B': Žiadnemu trojuholníku sa nedá opísať kružnica.

Pôvodný výrok B je pravdivý, jeho negácia je nepravdivá.

Spájanie výrokov

Doteraz sme hovorili len o jednoduchých výrokoch, vyhýbali sme sa súvetiam, ktoré by vznikli spájaním výrokov, napr.:

Dnes večer pôjdem do kina a do cukrárne.

Ak si upraceš v izbe, môžeš ísť na kúpalisko.

Takýmto výrokom hovoríme, že sú to **zložené výroky**. Vznikli z jednoduchých výrokov, ktoré sme spojili slovami a slovnými obratmi, ktoré nazývame **logické spojky**. Logickými spojkami sú napríklad *a – aj – a zároveň – alebo – ak ..., tak ... -... práve vtedy, keď ...*

Zložené výroky rozlišujeme podľa toho, aká logická spojka sa v nich vyskytuje.

Konjunkcia (označenie: $A \wedge B$) dvoch výrokov A a B je výrok utvorený ich spojením spojkou *a, aj, a zároveň*. Konjunkciu považujeme za pravdivú len vtedy, keď sú pravdivé obidva výroky, z ktorých sa skladá.

Príklad:

Martin má rád zmrzlinu **aj** čokoládu. Výrok je pravdivý, ak má Martin rád zmrzlinu a má rád aj čokoládu.

Alternatíva (disjunkcia) (označenie $A \vee B$) dvoch výrokov A a B je výrok utvorený ich spojením spojkou *alebo*. Alternatívu považujeme

za pravdivú len vtedy, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov, z ktorých sa skladá.

Príklad:

Kúpim si bicykel **alebo** korčule. Výrok je pravdivý, keď si kúpim len bicykel, i vtedy, keď si kúpim len korčule, i vtedy, keď si kúpim bicykel aj korčule.

Implikácia (označenie $A \Rightarrow B$) je výrok utvorený z dvoch výrokov A a B spravidla tak, že prvému preadíme slovo *ak*, druhému slovo *tak*. Implikáciu považujeme za nepravdivú len vtedy, ak je prvý výrok pravdivý a druhý nepravdivý.

Príklad:

Ak pôjde do kina Hanka, **tak** Danka ostane doma. Výrok je nepravdivý len vtedy, ak by Hanka išla do kina a Danka neostala doma. V ostatných prípadoch je výrok pravdivý.

Ekvivalencia (označenie $A \Leftrightarrow B$) dvoch výrokov A a B je výrok utvorený ich spojením slovným spojením *práve vtedy, keď*. Ekvivalenciu považujeme za pravdivú len v tých prípadoch, keď sú obidva výroky pravdivé alebo obidva nepravdivé.

Príklad:

Vietor nefúka **práve vtedy, keď** prší. Výrok je pravdivý, ak nefúka vietor a prší, ale aj vtedy, keď fúka vietor a neprší.

Pravdivostné hodnoty zložených výrokov závisia od pravdivostných hodnôt jednotlivých výrokov. Pravdivostné hodnoty uvádzame v tabuľke:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Príklad:

Z výrokov A: Preteky vyhrá Francúz.

B: Preteky vyhrá Nemec.

vytvorte všetky typy zložených výrokov.

Riešenie:

Konjunkcia ($A \wedge B$): Preteky vyhrá Francúz aj Nemec.

Alternatíva ($A \vee B$): Preteky vyhrá Francúz alebo Nemec.

Implikácia ($A \Rightarrow B$): Ak preteky vyhrá Francúz, tak ich vyhrá Nemec.

Ekvivalencia ($A \Leftrightarrow B$): Preteky vyhrá Francúz práve vtedy, keď ich vyhrá Nemec.

Negácie zložených výrokov môžeme utvoriť tak, ako v prípade jednoduchých výrokov, ich popretím. Vychádzame z vyššie uvedenej tabuľky pravdivostných hodnôt. Prichádzame k týmto pravidlám (**De Morganove pravidlá**):

výrok	negácia výroku
$A \wedge B$	nie A alebo nie B
$A \vee B$	nie A a súčasne nie B
$A \Rightarrow B$	A a súčasne nie B
$A \Leftrightarrow B$	(nie A a B) alebo (A a nie B)

Tak, ako je možné v „číselnej algebre“ vytvárať pomocou premenných výrazy, ktorých „vyhodnotením“ – po dosadení číselných hodnôt premenných – dostaneme číslo, je možné vytvárať výrazy aj pomocou výrokových premenných. Hovoríme im **výrokové formuly**. Ich vyhodnotením dostaneme pravdivostnú hodnotu *pravda* alebo *nepravda*.

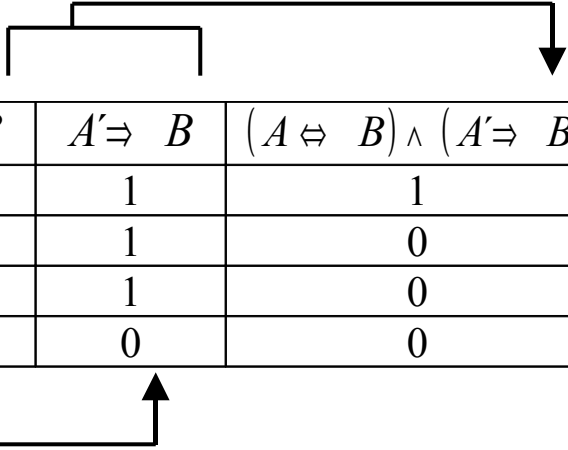
Tautológia je zložený výrok, ktorý je *pravdivý* pre každú hodnotu jednoduchých výrokov, z ktorých je zložený.

Kontradikcia je zložený výrok, ktorý je *nepravdivý* pre každú hodnotu jednoduchých výrokov, z ktorých je zložený.

Příklad:

Zistite, pri ktorých hodnotách výrokových premenných A, B nadobúda výroková formula hodnotu pravda:

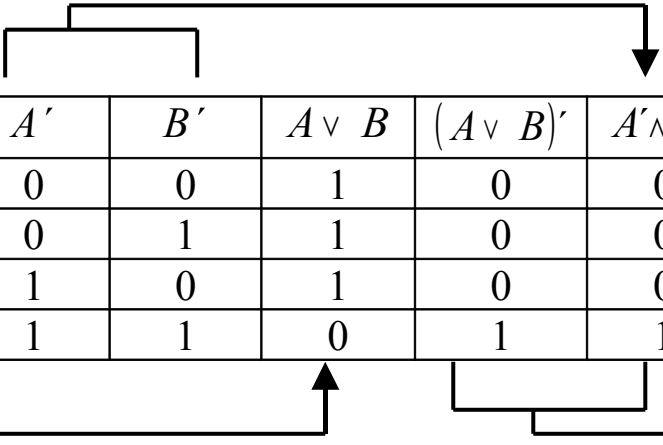
a) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A' \Rightarrow B)$



A	B	A'	$A \Leftrightarrow B$	$A' \Rightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (A' \Rightarrow B)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0

Výroková formula je pravdivá, keď oba z výrokov A, B sú pravdivé.

b) $[(A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')] \dots (*)$



A	B	A'	B'	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A' \wedge B'$	$(*)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Výroková formula je tautológia.

c) $[A \Rightarrow (B \wedge C)] \Leftrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \dots (*)$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(*)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

Výroková formula je nepravdivá v prípade, že výrok B platí a výroky A, C neplatia. V ostatných prípadoch je výroková formula pravdivá.

Sú typy slovných úloh, pri ktorých je výhodné robiť „výrokovú analýzu“ textu a na riešenie použiť tabuľky pravdivostných hodnôt výrokov.

Príklad:

Pri spracúvaní počítačových programov A, B, C platia tieto podmienky:

- Ak sa spracúva program A aj B , nespracúva sa C .
- Ak sa nespracúva A , spracúva sa B .
- Ak sa spracúva B alebo C , nespracúva sa A .

Aké sú možnosti spracúvania pri dodržaní uvedených podmienok?

Riešenie:

Zaved'me si nasledujúce označenie: A ... spracúva sa program A
 B ... spracúva sa program B
 C ... spracúva sa program C

Podľa textu úlohy musí platiť výrok:

$$[(A \wedge B) \Rightarrow C'] \wedge [A' \Rightarrow B] \wedge [(B \vee C) \Rightarrow A'] \dots (*)$$

Zostavme príslušnú tabuľku pravdivostných hodnôt:

A	B	C	A'	C'	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C'$	$A' \Rightarrow B$	$B \vee C$	$(B \vee C) \Rightarrow A'$	$(*)$
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0

Ako vidno z tabuľky, sledovaný zložený výrok nadobúda hodnotu *pravda* v troch prípadoch:

- spracúva sa len program A alebo
- spracúva sa program B a súčasne C alebo
- spracúva sa len program B .